ARGUMENTAÇÃO E PROVA ENVOLVENDO CONCEITOS DE MÚLTIPLOS E DIVISORES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MARCÍLIO FARIAS DA SILVA

Mestre em Educação Matemática pela PUC/SP (2008). Coordenador do Curso de Licenciatura em Computação das Faculdades Integradas Teresa D'Avila e professor universitário e educador da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo.

RESUMO

O propósito deste artigo é elaborar e analisar uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de provas e argumentações, destinada aos alunos de 9º. Ano do Ensino Fundamental, utilizando uma ferramenta computacional. Todo experimento foi desenvolvido no âmbito do projeto argumentação e prova na matemática escolar (AProvaME), que tem como objetivo construir um mapa sobre as concepções de argumentação e prova de alunos do Estado de São Paulo.A elaboração da sequência foi inspirada no questionário de Álgebra do projeto AProvaME e fundamentada e analisada sob a perspectiva da classificação de provas de Balacheff (1988), das idéias relacionadas aos papéis e funções das provas de De Villiers (2001) e nas sugestões apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

PALAVRAS-CHAVE

Argumentação, provas, múltiplos, divisores, ferramenta computacional

ABSTRACT

The purpose of this paper is to develop and analyze a didactic sequence for teaching and learning of evidence and arguments, intended for students 9. Year of elementary school, using a computational tool. The entire experiment was developed under the project argumentation and proof in school mathematics (AProvaME), which aims to build a map on the concepts of argumentation and evidence of students of the State of Paulo. The preparation sequence was inspired by the questionnaire Algebra Project A ProvaME reasoned and analyzed from the perspective of classification of evidence Balacheff (1988), the ideas related to theroles and functions of the evidence of De Villiers (2001) and the suggestions made in the National Curriculum.

KEYWORDS

Arguments, tests, multiples, divisors, computational tool

INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem por objetivo principal desenvolver, aplicar e avaliar uma seqüência didática para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, focando o ensino-aprendizagem de provas em Matemática e abordando os conceitos de Múltiplos e Divisores, com o auxílio de uma ferramenta computacional.

O experimento desenvolvido neste trabalho foi inspirado e está vinculado aos objetivos do projeto AProvaME (*Argumentação e Prova na Matemática Escolar*), cuja temática central refere-se a questões de ensino e aprendizagem da prova na matemática escolar. Esse projeto está organizado em duas fases, nosso estudo refere-se, particularmente, à fase 2, que consiste em desenvolver uma seqüência didática que propicie aos alunos vivenciar diferentes etapas do processo de prova, levando-os à elaboração de suas próprias conjecturas, à verificação da validade destas e à produção de argumentos que justificam ou explicam essa validade (ou não).

Em nosso experimento, empregamos alguns pressupostos ou idéias dos trabalhos de Balacheff (1988) sobre os tipos de prova e também de De Villiers (2001) com relação aos papéis da prova. Buscamos com isso, contribuir para a reflexão a respeito da atividade de provar, na Matemática da sala de aula, destacando o potencial das atividades, a postura dos alunos, o comportamento do professor-pesquisador frente a este tipo de proposta e o papel da ferramenta computacional adotada.

O PROJETO APROVAME

O projeto AProvaMe tem como tema central de pesquisa – conforme seu título indica – os processos de **A**rgumentação e **Prova** na **M**atemática **E**scolar. Ele se propõe a estudar questões referentes ao ensino e aprendizagem da prova em Matemática, tendo como universo de investigação alunos da faixa etária de 14 a 16 anos, que freqüentam o 9º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio, de escolas do Estado de São Paulo. A duração prevista para o desenvolvimento do projeto com um grupo de alunos é de dois anos.

De acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve ser composto de atividades e experimentos que viabilizem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, muitas pesquisas revelam que o raciocínio dos alunos não se apresenta constantemente, conforme as leis da lógica e é influenciado por uma série de fatores, além dessas exigências. Acreditamos que tal resultado procede no contexto brasileiro por dois motivos:

O primeiro é que os livros didáticos não apresentam atividades propícias para que os alunos possam desenvolver raciocínios lógicos matemáticos e produzir provas, para além do processo empírico. O segundo é que os professores de Matemática, muitas vezes não estão convencidos de que trabalhar com provas matemáticas, de maneira informal, seja bom e valorizam outros conteúdos. Talvez isso ocorra porque os professores não sabem elaborar tais atividades, visto que no processo de formação acadêmica só vivenciaram o ato de provar, matematicamente, de maneira formal.

Em uma de suas fases, o projeto AProvaMe propõe o trabalho de elaboração de atividades que engajem os alunos em processos de validação de uma proposição, auxiliando no desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas, de forma que eles produzam suas próprias provas, com o auxilio de recursos tecnológicos.

A equipe do projeto AProvaME é composta por um grupo de 27 alunos do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC/SP), do qual faço parte, e 6 (seis) professores pesquisadores, integrantes do grupo de pesquisa TecMEM (Tecnologia e Meios de Expressão em Matemática) do Programa de Mestrado da PUC/SP.

Em síntese, o projeto AProvaME visa mapear as concepções dos alunos com relação à prova e argumentação em Geometria e Álgebra e, como anteriormente, tem por objetivo o desenvolvimento de atividades com integração de recursos tecnológicos (calculadoras, computadores) para esse tipo de ensino. A idéia é levar os professores a adotarem uma "nova" postura, valorizando esse conteúdo muito importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

O projeto foi organizado em duas fases, da seguinte forma:

- <u>Fase 1</u>

  Nesta fase foi realizado o levantamento das concepções dos alunos frente à proposta do trabalho com provas e argumentações.

- <u>Fase 2</u>

  Os resultados da Fase 1 subsidiaram as decisões tomadas nesta fase, em relação à elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. O trabalho desenvolvido neste artigo está ligado diretamente a esta fase.

METODOLOGIA E ESTRATÉGIA DE AÇÃO

Desenvolvimento da Fase 1

Em agosto de 2005, iniciou-se esta fase, na qual os pesquisadores e mestrandos envolvidos no projeto tinham um encontro presencial quinzenal, e mantinham comunicação efetiva para a partilha de idéias, decisões e ações no âmbito do projeto, por meio de um espaço virtual criado na plataforma TelEduc.[38]

Para fazer o levantamento das concepções dos alunos sobre argumentação e prova em Matemática, foi elaborado um questionário, baseado em outro concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Foram realizadas várias discussões para a elaboração desse questionário, que é composto de duas partes, sendo uma com questões de Álgebra e outra com questões de Geometria.

Foi um momento muito rico de troca de experiências entre os participantes do projeto.

Descrição do questionário

Os itens que compõem o questionário visam avaliar em que medida os alunos aceitam evidências empíricas como prova e distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos. Além disso, pretendem analisar se os alunos compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir seus próprios argumentos. Buscam também identificar nas escolhas dos alunos, a influência da abordagem utilizada pelo professor, para o desenvolvimento de noções realizadas com a argumentação e a prova – língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.

Tipos de provas

Na elaboração de uma prova, o aluno busca em sua vivência matemática, recursos para validar, explicar e generalizar seus resultados. Para analisarmos os procedimentos dos alunos neste trabalho, utilizamos à classificação dos tipos de provas apresentada por Balacheff (1988): provas ***pragmáticas*** e provas ***conceituais.***

---

[38] O **TelEduc** é um ambiente de ensino a distância que possibilita a realização de cursos pela Internet. Está sendo desenvolvido conjuntamente pelo **Núcleo de Informática Aplicada à Educação (Nied)** e pelo **Instituto de Computação (IC)** da **Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)**. Para mais detalhes ver www.nied.unicamp.br.

As ***provas pragmáticas*** são aquelas que o aluno constrói, recorrendo aos seus conhecimentos práticos, e desenvolvendo procedimentos de ação, como exemplos e desenhos. Para o desenvolvimento dessas provas, o aluno considera alguns poucos casos e tenta mostrar que, uma afirmação é verdadeira, sem a preocupação de explicitar as propriedades do conhecimento que está em jogo ou suas relações.

As ***provas conceituais*** são aquelas que o aluno constrói explicitando formulações de propriedades do conhecimento em jogo e suas relações, fugindo de ações (mostrações) e buscando a generalização por meio de uma linguagem dedutiva e lógica.

O tipo de prova concebido pelos alunos sofre transições de caráter evolutivo, da pragmática para a conceitual, revelando saltos qualitativos nos esquemas apresentados por eles. Essa evolução está ligada diretamente ao aprimoramento da ação, da formulação e da validação de suas conjecturas. Segundo Balacheff (1988), a prova tem características hierárquicas, dependendo da qualidade da generalização do conhecimento envolvido. Apresentamos, a seguir, os tipos de provas identificados por esse autor, em relação ao processo evolutivo dos alunos, nos diferentes níveis de validação:

Provas Pragmáticas

- ***Empirismo ingênuo:*** é uma primeira tentativa de generalização do aluno, que admite a validação de uma propriedade após verificação de alguns poucos casos, não levando em conta a particularidade.
- ***Experimento crucial:*** O aluno inicia o processo de validação a partir de exemplos que contêm a característica do problema da generalização, e conclui tomando um caso particular possível.
- ***Exemplo genérico:*** O processo de validação do aluno se dá a partir de um exemplo que possui as propriedades representativas de sua classe, generalizando assim, a validade de uma proposição.

Provas Conceituais

- ***Experiência mental:*** Neste caso, o aluno não se apropria de casos particulares, mas sim de deduções lógicas baseadas em propriedades.

Desenvolvimento da Fase 2

Esta fase iniciou-se no primeiro semestre de 2006, tendo a aprendizagem e o ensino como dois eixos inter-relacionados que nortearam nossas investigações.

Quanto ao eixo da aprendizagem, o objetivo central é a elaboração e avaliação de situações diretamente ligadas aos campos de dificuldades e limitações de compreensão de provas, apontadas no mapeamento elaborado na Fase 1.

Já no segundo eixo, relativo ao ensino, a atenção é voltada para o professor mestrando participante do projeto e para a sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas situações *em ação,* considerando que as situações foram experimentadas pelos professores em suas salas de aula.

UM PANORAMA DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A seqüência didática proposta nesta fase foi elaborada com o objetivo de levar o aluno a vivenciar um processo de prova que inclui atividades de generalização, fases de formulação de hipóteses ou conjecturas e produção de argumentos, visando testar ou validar essas conjecturas. Pretendíamos, assim, dar condições para os alunos engajarem-se nesse tipo de atividade. Na proposta da seqüência didática, utilizamos o software Excel, como ferramenta auxiliar na geração de um campo de dados observáveis, possibilitando que os alunos testassem inúmeros casos para decidir sobre a validade de suas conjecturas.

Todas as atividades foram realizadas em duplas. Desta maneira, nossa intenção era proporcionar aos alunos momentos de interação social, comunicação e discussão para o entendimento das atividades e a elaboração de suas conjecturas e argumentos. Nesse sentido a prova adquire o papel de comunicação proposto por De Villiers (2001):

> *De modo semelhante, Davis (1976) também enunciou que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para debate crítico. De acordo com este ponto de vista, a demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, entre os próprios estudantes. (De Villiers, 2001, p. 35)*

A seqüência de atividades está dividida em três fases compostas de um caderno de atividades e de planilhas a serem elaboradas com o auxílio do software Excel. Para a aplicação das atividades, foram previstos 04 encontros de aproximadamente 1h 30 min de duração cada, fora do horário escolar (atividade extracurricular). Todos os encontros foram realizados no laboratório de Informática da escola.

Apresentaremos a análise da seqüência, organizada conforme o quadro abaixo.

Fase 0	Atividades: 1, 2, 3, 4 e 5
Fase 1	Atividades: 1, 2
Fase 2	Atividades: 1, 2

Tabela 01: Atividades aplicadas em cada fase.

Apresentação dos resultados da Atividade 1 – Fase 0

Sendo $a \in Z$ e $b \in Z$, determine $a+b \in Z$ em uma planilha do Excel.

1º) Abra uma planilha no Excel. Na célula A1, digite a; na célula B1, digite b; na célula C1, digite $a+b$ (conforme exemplo abaixo).

2º) Para criar nossa primeira fórmula, existem dois caminhos:

- Na célula C2, digite =A2+B2, finalizando clicando fora da célula C2.
- Digite = em C2, e em seguida clique em A2 digite +, clique em B2 e finalizar digitando Enter.

3º) Testando a fórmula. Na célula A2, digite 2; na célula B2, digite 4; selecione a célula C3 e verifique o resultado.

4º) Agora, crie uma tabela contendo pelo menos 20 somas.

Para isso:

a) Selecione a célula C2 clicando o mouse com o botão direito e selecionando o comando copiar.

b) Selecione as células pertencentes, a coluna $a+b$ de C3 a C11, clicando o botão direito do mouse selecione colar.

5º) Teste atribuindo valores para a e b, e verifique se a soma está correta.

	A	B	C
1	a	b	a+b
2	2	4	6
3	3	5	8
4	-10	15	5
5	-17	500	483
6	1024	-3254	-2230
7	15	-2457	-2442
8	10	44	54
9	-53	98	45
10	90	-100	-10
11	12	1	13

Comente esta atividade: ____

Figura 19: Atividade 1 – Fase 0

O objetivo desta atividade era propiciar ao aluno um primeiro contato com o Excel e desenvolver habilidades como: confeccionar uma planilha, formatar a digitação nas células, elaborar e testar fórmulas e saber utilizar os comandos "copiar" e "colar" fórmulas, dando-lhe condições para elaborar bancos de dados em planilhas eletrônicas (Excel) para análise, verificação e validação de suas conjecturas. Contemplamos desta forma uma das propostas dos PCN (1998), a respeito da utilização de recursos tecnológicos na aula de Matemática:

> *Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo.*
>
> *Eles podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:*
>
> - *como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;*
> - *como auxiliar no processo de construção de conhecimento;*
> - *como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;*
> - *como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.(PCN,1998, p. 44)*

Análise *a posteriori* da Atividade 1 - Fase 0

Microsoft Excel - Atividade 1 - fase 0

	A	B	C	D
1	a	b	a+b	
2	2	4	6	
3	10	1000	1010	
4	-21	40	19	
5	17	-38	-21	
6	27	-4560	-4533	
7	43	600	643	
8	72543	54901	127444	
9	587	25958	26545	
10	15697	-12658	3039	
11	65	64	129	
12	13887	-1267	12620	
13	-569752	-5368	-575120	
14	9854	36587	46441	
15	-236578	125333	-111245	
16	-854760	-365479	-1220239	
17	4589234	75986	4665220	
18	26887	12586	39473	
19	59864	36758	96622	
20	-4589663	4589	-4585074	

Figura 20: Planilha da Atividade1 – Fase 0 - Dupla A

Todas as duplas conseguiram elaborar as planilhas e apresentaram os resultados, conforme a planilha acima, sem maiores dificuldades, como declararam em seus cadernos de atividade:

Comente esta atividade: Foi muito divertida, adoramos. Bem fácil e gosto-sa de se fazer.

Figura 21: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla A

(Foi muito divertida, adoramos. Bem fácil e gostosa de se fazer).

Comente esta atividade: Para nós foi fácil, por sabermos utilizar o Excel

Figura 22: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla B

(Para nós foi fácil, por sabermos utilizar o Excel).

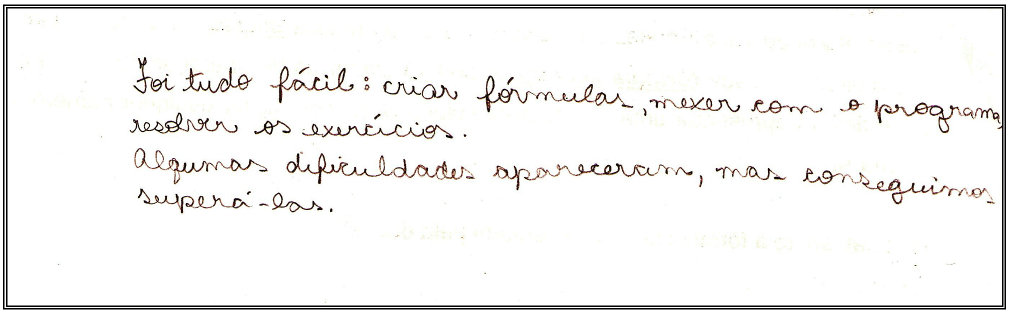

Foi tudo fácil: criar fórmulas, mexer com o programa
resolver os exercícios.
Algumas dificuldades apareceram, mas conseguimos
superá-las.

Figura 23: Comentários sobre Atividade 1 da Fase 0 – Dupla C

(Foi tudo fácil: criar fórmulas, mexer com o programa resolver os exercícios. Algumas dificuldades apareceram, mas conseguimos superá-las).

Logo de início, conforme relata à dupla C, foram observadas algumas dificuldades na elaboração das fórmulas. Acreditamos que isso poderia ter sido evitado, se houvéssemos anexado o quadro explicativo à ficha de atividades. O quadro explicativo, conforme está representado a seguir, tinha o objetivo de apresentar os comandos básicos das operações elementares da aritmética com seus respectivos exemplos, necessários para iniciar a Atividade 1.

Operador aritmético	*Significado (exemplo)*
+ (sinal de mais)	Adição (4+3)
- (sinal de menos)	Subtração (4-3) Negação (-1)
*(asterisco)	Multiplicação (4*5)
/ (sinal de divisão)	Divisão (4/2)
= (sinal de igual)	Comparação Igual a (A1=A1)

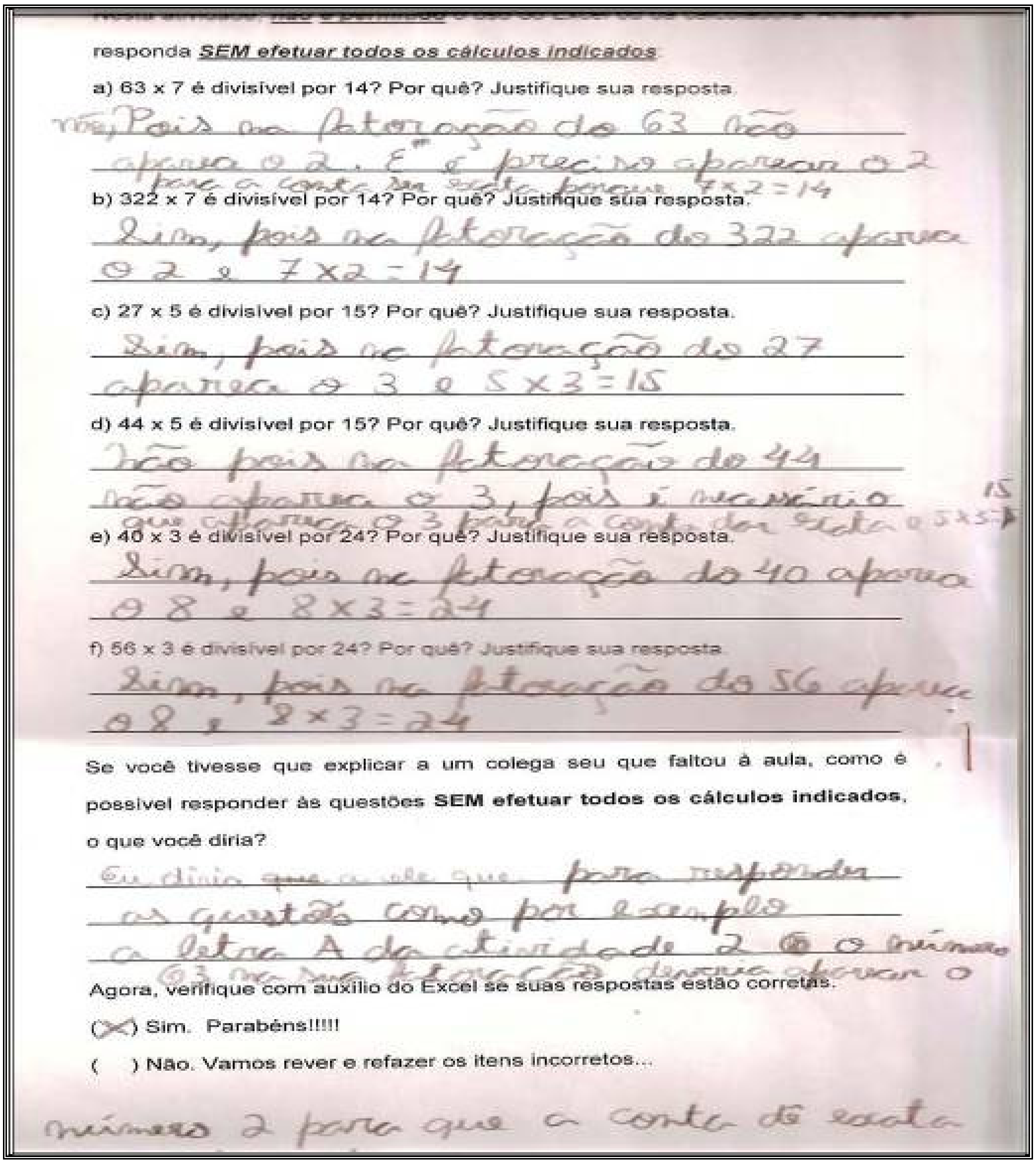
Quadro 01: Quadro explicativo.

Resolvemos essas dúvidas projetando o quadro explicativo, com o auxílio de um D*ata Show* e os alunos conseguiram dar seqüência às atividades.

De maneira geral, foi muito produtivo e, pelas frases das duplas A e B, os alunos estavam motivados e gostaram das atividades. Acredito que o objetivo principal de manipulação e familiarização com o Excel foi atingido.

Análise *a posteriori* - Atividade 2 - Fase 1

Apresentamos a seguir, os protocolos referentes à atividade 2 da etapa Refazendo a Fase 1.


responda ***SEM efetuar todos os cálculos indicados***:

a) 63 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

não, Pois na fatoração do 63 não aparece o 2. E é preciso aparecer o 2 para a conta ser exata porque 7x2=14

b) 322 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 322 aparece o 2 e 7x2=14

c) 27 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 27 aparece o 3 e 5x3=15

d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Não pois na fatoração do 44 não aparece o 3, pois é necessário que apareça o 3 para a conta dar exata

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 40 aparece o 8 e 8x3=24

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, pois na fatoração do 56 aparece o 8 e 8x3=24

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Eu diria a ele que para responder as questões como por exemplo a letra A da atividade 2 é o número 63 na sua fatoração deveria aparecer o número 2 para que a conta dê exata

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

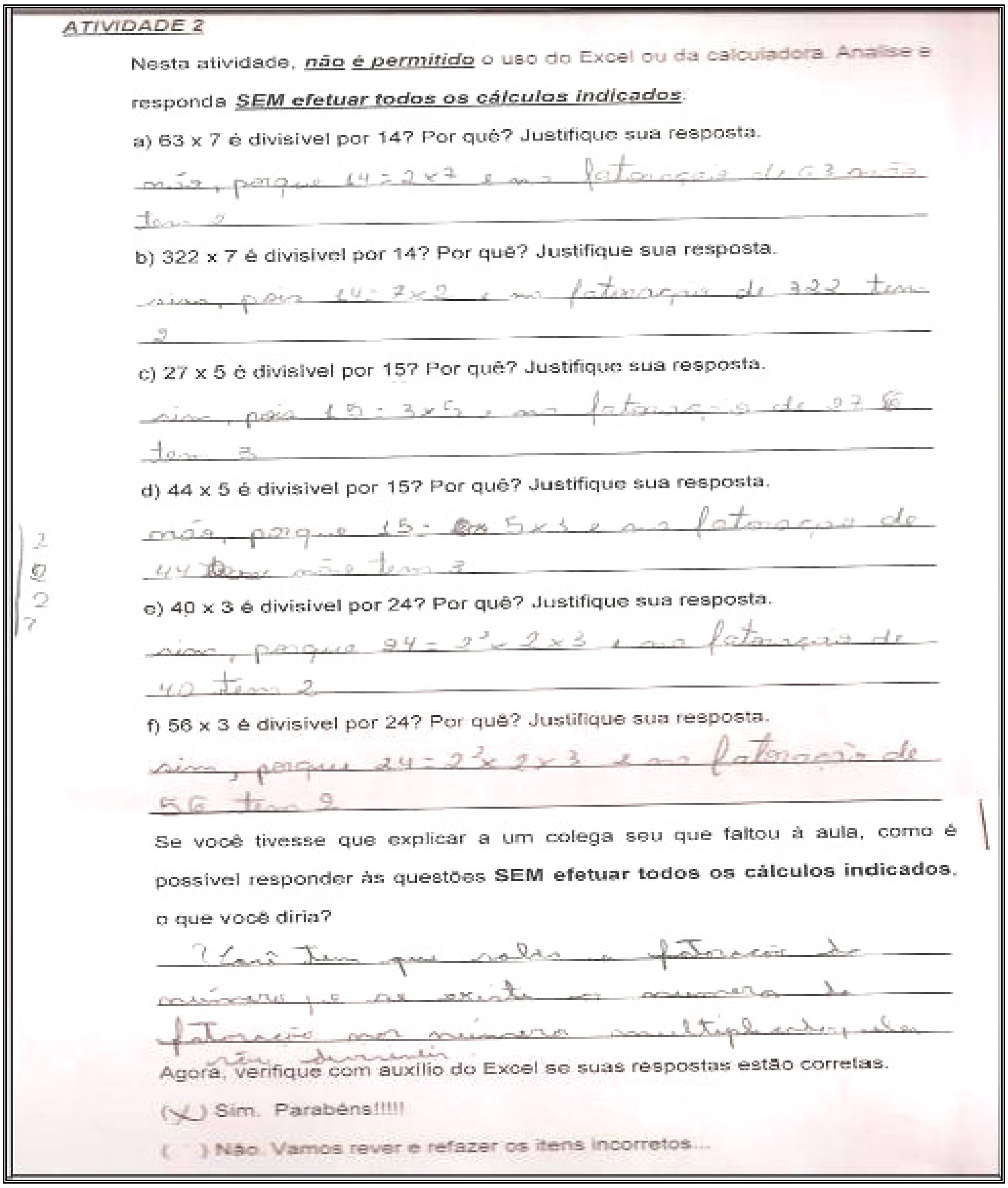
(X) Sim. Parabéns!!!!!

( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

Figura 45: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla A

Na resposta apresentada pela dupla A, podemos observar que atingiram o objetivo, utilizando a língua materna para explicitar as propriedades matemáticas em jogo. Podemos considerar essa explicação dentro da classificação de exemplos genéricos, de acordo com o modelo de Balacheff (1988).

Analisamos, a seguir, as respostas apresentadas pela dupla B:



ATIVIDADE 2

Nesta atividade, **não é permitido** o uso do Excel ou da calculadora. Analise e responda **SEM efetuar todos os cálculos indicados**.

a) 63 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

não, porque 14 = 2x7 e na fatoração de 63 não tem 2

b) 322 x 7 é divisível por 14? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, pois 14 = 7x2 e na fatoração de 322 tem 2

c) 27 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, pois 15 = 3x5 e na fatoração de 27 tem 3

d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

não, porque 15 = 5x3 e na fatoração de 44 não tem 3

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, porque 24 = 2² x 2 x 3 e na fatoração de 40 tem 2

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

sim, porque 24 = 2² x 2 x 3 e na fatoração de 56 tem 2

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Você tem que saber a fatoração do número, e se existe o número da fatoração nos números multiplicados, ele vai ser divisível

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

(X) Sim. Parabéns!!!!!

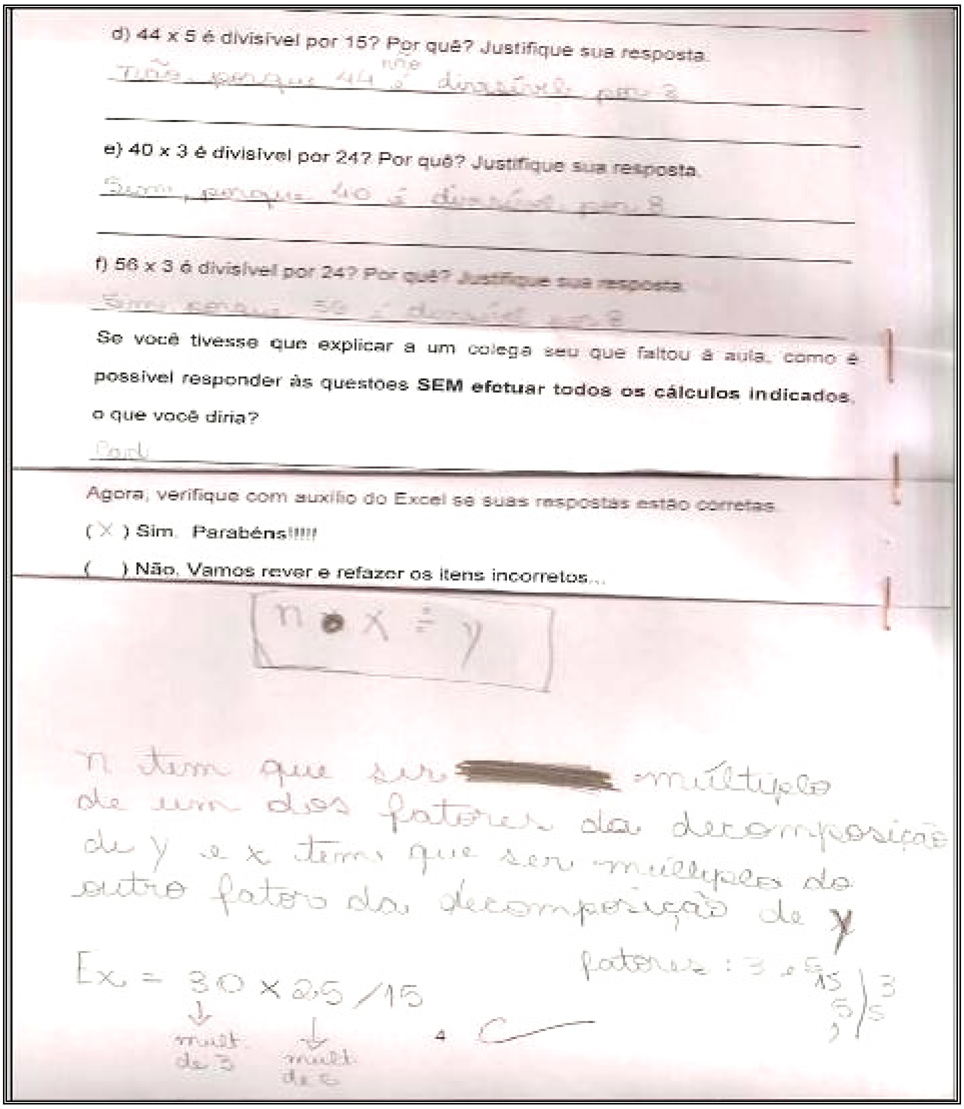
( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

Figura 46: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla B

A dupla B atingiu parte do objetivo da atividade, pois perceberam que 27 x 5 é divisível por 15, porque 3 está na fatoração de 27. Mas, não perceberam que para que um número multiplicado por 3 seja divisível por 24, deve ser múltiplo de 2³.

A dupla baseou-se no empirismo, elaborando uma prova pragmática atingindo o nível de experimento crucial, alicerçada nos seus conhecimentos matemáticos transcritos em língua materna.

O protocolo apresentado na seqüência contém as respostas da dupla C, à atividade 2 da etapa Refazendo a Fase 1.



d) 44 x 5 é divisível por 15? Por quê? Justifique sua resposta.

Não, porque 44 não é divisível por 3

e) 40 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, porque 40 é divisível por 8

f) 56 x 3 é divisível por 24? Por quê? Justifique sua resposta.

Sim, porque 56 é divisível por 8

Se você tivesse que explicar a um colega seu que faltou à aula, como é possível responder às questões **SEM efetuar todos os cálculos indicados**, o que você diria?

Agora, verifique com auxílio do Excel se suas respostas estão corretas.

(X) Sim. Parabéns!!!!!

( ) Não. Vamos rever e refazer os itens incorretos...

$\boxed{n \bullet x \div y}$

n tem que ser [redacted] múltiplo de um dos fatores da decomposição de y e x tem que ser múltiplo do outro fator da decomposição de y

fatores: 3 e 5

Ex = 30 x 25 / 15

mult. de 3 — mult. de 5

Figura 47: Atividade 2 – Refazendo a Fase 1 - dupla C

A dupla C atingiu o objetivo esperado. No item que solicita a explicação, a dupla iniciou uma tentativa de validação genérica, que faz parte do processo de transição de prova matemática pragmática para a conceitual, definidas por Balacheff (1988). Nesse processo de transição observamos que a dupla elaborou uma prova escrita em linguagem natural conceitual, tentando algebrizá-la. Consideramos, então, que a prova apresentada por esta dupla é uma prova mista.

Segundo De Villiers (2001) a justificativa apresentada pela dupla C enquadra-se dentro do papel da prova com a função de sistematização, em que o aluno tenta, num processo de verificação, organizar, avaliar a consistência e aplicabilidade de seus argumentos pré-estabelecidos.

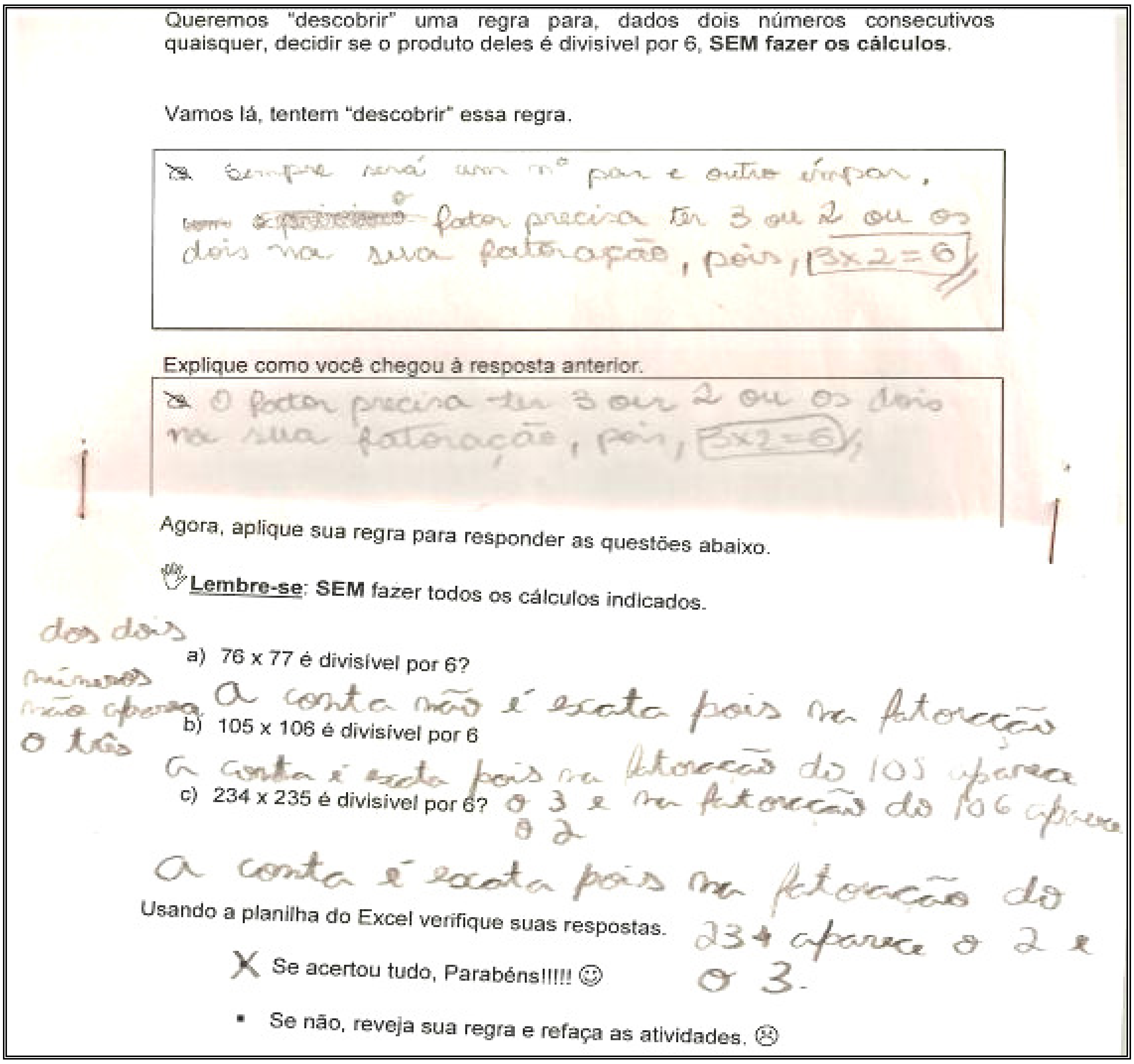
> *A demonstração é, portanto, uma ferramenta indispensável para sistematizar vários resultados conhecidos num sistema dedutivo (De Villiers, 2001, p. 12).*

Concluímos que o objetivo desta fase foi atingido, pois as três duplas conseguiram perceber que é importante levar em conta os fatores dos números envolvidos na operação, e com isso, poder analisar os divisores e resolver a questão sem efetuar os cálculos.

Como comentamos anteriormente, não podemos deixar de salientar que o sucesso desta fase está diretamente ligado ao momento de intervenção. O trabalho feito com cada dupla surtiu efeito e o papel do professor foi fundamental, para que os objetivos do experimento fossem alcançados.

No próximo item analisamos os resultados da fase 2, que é a última da seqüência didática desenvolvida neste experimento.

Análise *a posteriori* - Atividade 1 - Fase 2


Queremos "descobrir" uma regra para, dados dois números consecutivos quaisquer, decidir se o produto deles é divisível por 6, **SEM fazer os cálculos.**

Vamos lá, tentem "descobrir" essa regra.

Sempre será um nº par e outro ímpar, o fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, $\boxed{3 \times 2 = 6}$

Explique como você chegou à resposta anterior.

O fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, $\boxed{3 \times 2 = 6}$

Agora, aplique sua regra para responder as questões abaixo.

Lembre-se: **SEM** fazer todos os cálculos indicados.

dos dois números não aparece o três

a) 76 x 77 é divisível por 6?

a conta não é exata pois na fatoração

b) 105 x 106 é divisível por 6

a conta é exata pois na fatoração do 105 aparece o 3 e na fatoração do 106 aparece o 2

c) 234 x 235 é divisível por 6?

a conta é exata pois na fatoração do 234 aparece o 2 e o 3.

Usando a planilha do Excel verifique suas respostas.

X Se acertou tudo, Parabéns!!!!! ☺

- Se não, reveja sua regra e refaça as atividades. ☹

Figura 49: Protocolo da Atividade 1 – Fase 2 – dupla A

No quadro a seguir transcrevemos o momento de interação da dupla A com o professor aplicador no momento da resolução da atividade 1 – Fase 2.

Aluna 1: O professor tem que construir a tabela? Professor: Sem a tabela é possível responder a questão?

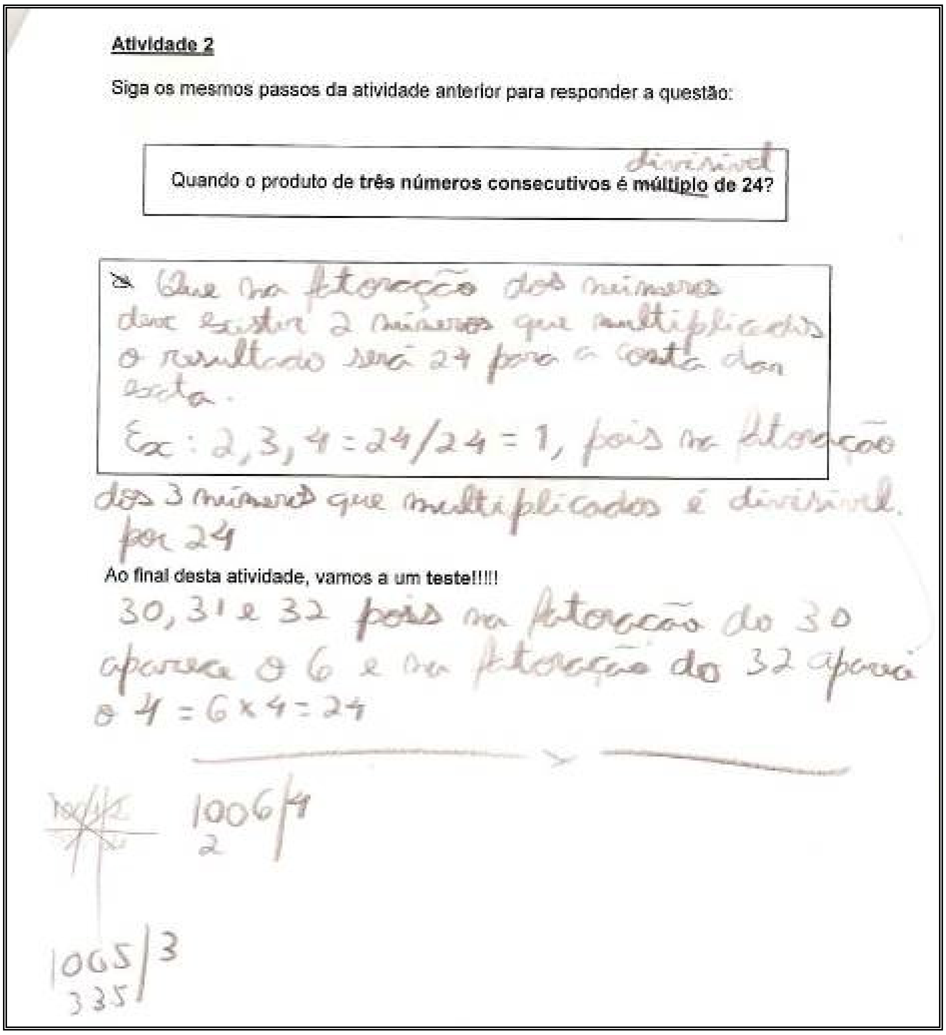
Aluna 2: É igual à tabela da aula passada. Professor: Tem que ler o enunciado da questão, para saber o que é preciso para elaborar a tabela. A 1: Professor a tabela está correta? Professor: Sim. É por aí o caminho. A 1: Descobri os números que dão divisão exata por 6. A 2: E agora professor, o que tem que fazer? Professor: Lê o enunciado. Quando o produto de... A 1: Professor, porque deu exato na planilha é só isso que eu consigo enxergar. Professor: Não é isso que estamos querendo saber, lê o enunciado! Temos que olhar para o produto dos números consecutivos para ver o que eles têm em comum. A 2: Ah! Lembrei tem que fatorar o 6 e depois olhar para os números. A 1: Igual foi feito na aula passada. A 2: Sim, o 6=2x3, tem que ter esses números. O professor, esta certo? Professor: É por aí, mas vocês têm que olhar para os números multiplicados. A 2: Olha na tabela é um número ímpar e outro par, por causa do 2x3. A 1: Professor, eu acho que descobri. Está certa a resposta? Professor: Isso é com vocês, analisem e elaborem a regra. A 1: Eu escrevo a regra e você completa o resto dos exercícios. A 2: OK! A 1: Um número sempre será par e outro ímpar, o fator precisa ter 3 ou 2 ou os dois na sua fatoração, pois, 3x2=6. Está certo? A 2: Acho que está. Professor, nós elaboramos a regra. Dá uma olha. Professor: Já testaram para vários números? Eu só corrigir depois! A 1: Escrevi a regra com minhas palavras.

Quadro 07: Interação: alunos da dupla A e professor - Atividade 1 – Fase 2.

A dupla A atingiu parte dos objetivos da atividade 1 da Fase 2, como se percebe na interação relatada no quadro 5, mediante o auxilio constante do professor. Demonstrou alguma dúvida a respeito da necessidade de construir a tabela (item indispensável) e, só depois do questionamento do professor, elaboram a planilha e responderam corretamente conforme a figura 50.

Com base nos tipos de provas propostos por Balacheff (1988), julgamos que a justificativa apresentada por esta dupla pode ser classificada como empirismo ingênuo, expresso em língua natural.

Análise *a posteriori* - Atividade 2 - Fase 2



Atividade 2

Siga os mesmos passos da atividade anterior para responder a questão:

Quando o produto de **três números consecutivos** é **múltiplo** divisível de 24?

Que na fatoração dos números deve existir 2 números que multiplicados o resultado será 24 para a conta dar exata.

Ex: 2,3,4 = 24/24 = 1, pois na fatoração dos 3 números que multiplicados é divisível por 24

Ao final desta atividade, vamos a um teste!!!!

30, 31 e 32 pois na fatoração do 30 aparece o 6 e na fatoração do 32 aparece o 4 = 6 x 4 = 24

1006 | 4
2

1005 | 3
335

Figura 53: Protocolo – Atividade 2 – Fase 2 – dupla A

Em suas respostas, a dupla A apresentou justificativas elaboradas de maneira informal, que, segundo a classificação proposta por Balacheff (1988), estão vinculadas aos tipos de provas pragmáticas alicerçadas na língua natural.

Observa-se, nos registros feitos, que, ao explicar os seus argumentos, procedimento importante destacado por De Villiers (2001), a dupla identifica as características que as ternas de números consecutivos devem possuir para que seu produto seja múltiplo de 24. Para essa descoberta buscaram encontrar na decomposição dos números escolhidos, fatores que multiplicados tinham como produto o número 24. Para a elaboração dessa justificativa, foi utilizada a planilha eletrônica exibida na figura 54, que possibilitou uma visão global do comportamento desses números.

	A	B	C	D	E
1	n	n+1	n+2	n*(n+1)*(n+2)	[n*(n+1)*(n+2)]/24
2	1	2	3	6	0.25
3	**2**	**3**	**4**	**24**	**1**
4	3	4	5	60	2.5
5	**4**	**5**	**6**	**120**	**5**
6	5	6	7	210	8.75
7	**6**	**7**	**8**	**336**	**14**
8	**7**	**8**	**9**	**504**	**21**
9	**8**	**9**	**10**	**720**	**30**
10	9	10	11	990	41.25
11	**10**	**11**	**12**	**1320**	**55**
12	11	12	13	1716	71.5
13	**12**	**13**	**14**	**2184**	**91**
14	13	14	15	2730	113.75
15	**14**	**15**	**16**	**3360**	**140**
16	**15**	**16**	**17**	**4080**	**170**
17	**16**	**17**	**18**	**4896**	**204**
18	17	18	19	5814	242.25
19	**18**	**19**	**20**	**6840**	**285**
20	19	20	21	7980	332.5
21	**20**	**21**	**22**	**9240**	**385**
22	21	22	23	10626	442.75
23	**22**	**23**	**24**	**12144**	**506**
24	**23**	**24**	**25**	**13800**	**575**
25	**24**	**25**	**26**	**15600**	**650**
26	25	26	27	17550	731.25
27	**26**	**27**	**28**	**19656**	**819**
28	27	28	29	21924	913.5
29	**28**	**29**	**30**	**24360**	**1015**
30	29	30	31	26970	1123.75
31	**30**	**31**	**32**	**29760**	**1240**

Figura 54: Planilha elaborada pela dupla A – Atividade 2 – Fase 2

O quadro a seguir ilustra o momento de interação dupla/professor durante a resolução da atividade.

Aluna 1: Professor, nós construímos a tabela.

Professor aplicador: Busquem encontrar uma propriedade comum entre os números escolhidos.

Aluno 2: Vamos selecionar os números que dão certo.

Aluno 1: Olha que esquisito um número dá certo, depois pula um para dar certo de novo, pula mais um e depois na seqüência aprecem três números seguidos que dão certos.

Aluno 2: É mesmo porque será. Professor, professor...

Aluno 1: Olha que estranho por que isso acontece?

Professor aplicador: Isso acontece por algum motivo, é isso que o exercício quer que vocês descubram! O que esses três números consecutivos têm em comum, para isso acontecer?

Aluno 2: Vamos tentar descobrir!

Aluno 1: Ah! Olha aqui, o primeiro 2x3x4=24/24=1 deu certo porque apareceu o 24.

Aluno 2: É mesmo vamos pegar um número maior para ver se dá certo?

Aluno 1: É isso mesmo, olha na tabela o 30, 31 e 32 deu certo, pois na fatoração do 30 aparece o 6 e na fatoração do 32 aparece o 4 e 6x4=24.

Aluno 2: Professor está correto a nossa resposta?

Quadro 08: Interação: dupla A e professor - Atividade 2 - Fase 2.

Analisando os diálogos do quadro acima, observa-se que a dupla A, continuou dependendo do auxilio do professor para elaborar suas respostas. É importante notar que nesta última atividade eles não apresentaram cálculos – centraram-se na análise dos números escolhidos, conseguindo explicitar uma justificativa com mais propriedade em relação às demais.

Conclusão

Principais resultados

O experimento foi realizado em três fases, cada qual com objetivos específicos, a fim de propiciar aos alunos as condições necessárias para avançar para a fase seguinte, como explicitaremos:

Na fase 0, o objetivo de nosso estudo era familiarizar os alunos com o Excel, explorando as noções matemáticas: "ser múltiplo de" e "ser divisível por". Foi constatada uma dificuldade inicial de manipulação das ferramentas do software, para a construção das primeiras fórmulas. Sendo superada rapidamente após as projeções, em uma tela, dos comandos necessários para a construção das fórmulas.

Nas atividades que exploram as noções de múltiplos e divisores de números inteiros, constatamos que o objetivo foi atingido parcialmente, visto que, embora as duplas houvessem demonstrado algum conhecimento sobre as noções de múltiplos e divisores de números inteiros, apresentaram dificuldades ao explicitar seus argumentos.

Por exemplo, a resposta apresentada pela dupla B, à questão: *Quando um número é múltiplo de outro?* demonstra certa confusão, pois apresenta de maneira incorreta, os divisores de 12 (*12={1,2,3,4,6,12})*. É possível que os alunos tenham considerado o fato de que 12 é divisível por 1, 2, 3, 4 e 6.

O mesmo não aconteceu com a noção de número divisível por outro, em que as duplas expressaram seus argumentos em língua natural e empiricamente, em nível de prova pragmática, como revela o argumento apresentado pela dupla A (figura: 27): *"Quando o quociente é exato"*. *"Ex.: 32: 4=8"*.

Mediante o comportamento das duplas que não conseguiram expressar corretamente suas idéias em relação à noção de múltiplos de números inteiros, realizamos um momento de intervenção para que a próxima fase transcorresse com sucesso.

O objetivo da fase 1 era levar os alunos a desenvolver suas primeiras tentativas de validação e explicitação de conjecturas elaboradas com o auxílio do recurso tecnológico. Ou seja, sem efetuar os cálculos, os alunos deveriam analisar as propriedades em jogo e fazer generalizações. Analisando as respostas apresentadas pelas duplas, podemos observar que não tendo destacado no enunciado que não era permitido efetuar os cálculos, comprometemos o objetivo estabelecido para estas atividades. Dessa forma, as duplas se apoiaram em cálculos com lápis e papel para expressar seus argumentos, mas mesmo assim percebemos nas respostas apresentadas pela dupla A na atividade 2 desta fase, que conseguiu atingir o objetivo, identificando a regularidade necessária aos números escolhidos, que multiplicados por 4, se tornariam divisíveis por 12. A dupla não justificou suas conclusões, porque o pedido de justificativa não estava explícito no enunciado da atividade.

Constatamos a necessidade de realizar uma intervenção, pois as dúvidas demonstradas pelos alunos poderiam comprometer a realização do experimento. Na seqüência, refizemos a fase 1, na tentativa de atingir o resultado esperado.

Após a intervenção, observou-se um avanço significativo, na elaboração de argumentos e justificativas e consideramos que nosso objetivo foi alcançado.

Esperávamos que, com o auxílio das planilhas eletrônicas, os alunos observassem regularidades, desenvolvessem provas pragmáticas representadas na língua natural, generalizando o seu resultado. Constatamos que as duplas A e C conseguiram atingir o objetivo estabelecido para esta fase. Já a dupla B atingiu apenas uma parte do objetivo, visto que ainda realizava cálculos com lápis e papel para elaborar as justificativas de seus argumentos.

Notamos que, de maneira geral, todas as justificativas apresentadas pelas duplas se mantiveram no quadro de provas pragmáticas empíricas, representadas em língua natural, como descrito por Balacheff (1988).

Apenas a dupla C apresentou uma tentativa de generalização que, segundo nosso ponto de vista, pode ser classificada como prova mista. Esse procedimento faz parte da transição da prova pragmática para a prova conceitual segundo Balacheff (1988).

Com relação ao processo de apresentação dos argumentos, verificamos que as conjecturas e validações explicitadas empiricamente pelos sujeitos de nosso estudo não diferem dos resultados apresentados por Santos (2007) que analisou as questões A3 e A4 do questionário de Álgebra do projeto AProvaME, que serviram de base para a formulação de nossas atividades :

> *Como visto nas questões estudadas, o processo de justificativa é basicamente feito com exemplos empíricos, sem a construção de argumentações válidas, com estruturas matemáticas bem definidas. Na questão A3, tivemos 55,76% das justificativas apresentadas nessas condições e na questão A4 27,53% das justificativas de maneira empírica (Santos, 2007, p. 121-122).*

Dessa forma, concluímos que nossas atividades, em relação à elaboração de justificativas e argumentações dos alunos, não revelaram resultados diferentes das pesquisas já realizadas com o mesmo propósito.

Na aplicação do *refazendo a fase 1*, os alunos deram um salto qualitativo importante, descrevendo justificativas, considerando mais as propriedades dos números, isentando-se dos cálculos e apresentando provas pragmáticas empíricas com maior freqüência em relação às fases anteriores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização de nossa pesquisa, percebemos a importância de desenvolver e aplicar seqüências didáticas envolvendo a prova matemática com uma abordagem construtiva. Pudemos constatar que não só os alunos apresentam dificuldades durante a realização do experimento – como revelaram as respostas dos sujeitos –, mas também os professores encontram dificuldades na elaboração e aplicação, quando buscam tornar significativo este tipo de atividade para o aluno.

O professor aplicador desempenhou o papel de mediador ativo, ajudando os alunos neste momento difícil de ruptura dos esquemas tradicionais de atividades matemáticas. As atividades que aplicamos exigem que o aluno perceba as propriedades numéricas envolvidas na questão e desta maneira desenvolva habilidades para elaborar suas validações.

Trabalhar com prova requer uma atenção minuciosa do professor, para deixar claro ao aluno que ele é agente da construção do seu conhecimento como sugerem os PCN (1998). Pudemos vivenciar esse fato quando aplicamos o *refazendo a fase 1*, assumindo a postura de professor mediador ativo, incentivando os alunos a expressarem seus raciocínios e transferindo-lhes a responsabilidade de elaborar suas respostas. Conseqüentemente, obtivemos os primeiros resultados significativos quando os alunos começaram apresentar provas conceituais, abandonando, um pouco, as provas pragmáticas empíricas.

Finalmente, acrescentamos que quando ingressamos no curso de Mestrado, tínhamos alguns anseios de saber como trabalhar atividades desafiadoras em nosso dia-dia com as ferramentas tecnológicas, a fim de aprimorar nossa prática docente.

Com a participação no projeto AProvaME, descobrimos e vivenciamos possibilidades reais de como abordar esses tipos de questões desafiadoras, constatando que é possível elaborar e propor questões que estimulem os alunos da educação básica no estudo de provas.

Encerramos nossas observações ressaltando a fundamental importância do papel do professor no ensino de provas em virtude das dificuldades dos alunos. Este fato aumenta a nossa responsabilidade de estar sempre engajados em desenvolver novas pesquisas, registrar e divulgar experiências que apontam para novas posturas que viabilizem o ensino de provas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEEF, N. Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18 (2), p. 147-176, 1987

__________. Aspecto f proof in pupil's practice of school mathematics. Pimm, D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children.* London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* matemática: ensino de 5ª a 8ª séries. Brasília, 1998.

CARVALHO, M. B. *Concepções de alunos sobre provas e argumentos matemáticos: análise de questionário no contexto do projeto AProvaME.* 2007. 138f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DE VILLIERS M., Na alternative approach to proof in dynamic geometry In: Lehrer, R.; Chazan, D. (Ed). *New direction in teaching and learning Geometry.* P. 369-393, 1998.

___________. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad.* Revista Educação e Matemática, nº. 63, APM. Portugal. p. 33-36, June,2001.

DORO, A. T., *Argumentação e prova: Análise de argumentos geométricos de alunos de educação básica.* 2007. 117f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas. Autores associados (Coleção Formação de Professores), 2006.

GRAVINA, M. A., *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo.* 2001. 274f. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre.

HEALY, S. V.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 31, n. 4, p. 396-428, 2000.

LEANDRO, E. J., *Um panorama de argumentação de alunos da escola básica: o caso do factorial.* 2006. 139f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

NASSER, I; TINOCO, L. (Coord.) (2001). *Argumentação e provas no ensino de matemática.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ – Projeto Fundão.

PIETROPAOLO, R. C., *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* 2005. 388f. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. B. S., *Argumentação e prova: análise de argumentos algébricos de alunos de educação básica.* 2007. 145f. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

VAZ, R. L., *O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.* 2004. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.